

文章编号: 1000-7598 (2011) 07-2171-06

断裂问题的扩展有限元法研究

茹忠亮¹, 朱传锐¹, 张友良², 赵洪波¹

(1. 河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 454010; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 扩展有限元 (extended finite element method, XFEM) 是近年来发展起来的、在常规有限元框架内求解不连续问题的有效数值计算方法, 其基于单位分解的思想, 在常规有限元位移模式中加入能够反映裂纹面不连续性的跳跃函数及裂尖渐进位移场函数, 避免了采用常规有限元计算断裂问题时需要对裂纹尖端重新加密网格造成的不便。在推导扩展有限元算法的基础上, 分析了应力强度因子的 J 积分计算方法及积分区域的选取。采用 XFEM 对 I 型裂纹进行了计算, 有限元网格独立于裂纹面, 无需在裂纹尖端加密网格; 分析了积分区域、网格密度对应应力强度因子计算精度的影响, 指出了计算应力强度因子的合适参数, 验证了此方法的可靠性和准确性。

关 键 词: 扩展有限元; 裂纹; 形函数; 数值方法

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Study of fracture problem with extended finite element method

RU Zhong-liang¹, ZHU Chuan-rui¹, ZHANG You-liang², ZHAO Hong-bo¹

(1. College of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000, China;

2. State key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: The extended finite element method (XFEM) is a numerical method for modeling discontinuities within the classical finite element framework developed in recent years. In XFEM, jump functions and asymptotic crack-tip fields were added to enrich the finite element displacement using the framework of partition of unity to model the discontinuities of cracks. A key advantage of XFEM is that in fracture problems the finite element mesh does not need to be updated and remeshed. Based on the algorithm of XFEM, the J integral methods which calculate the stress intensity factor (SIF) are introduced. A numerical case with model I fracture is analyzed by XFEM. The results illustrate that the FEM mesh is independent of the crack interface. The major factors which influence the accuracy of SIF are discussed, such as integral domain and mesh density. Proper parameters to calculate the SIF are given; and the feasibility and accuracy of XFEM are validated.

Key words: extended finite element method; fracture; shape function; numerical method

1 引 言

大量的断裂事故表明, 构件断裂都是由于其内部存在各种类型的裂纹, 这些裂纹的存在和扩展, 使结构的承载力在一定程度上削弱, 从而影响工程结构的质量和安全。因此, 研究裂纹起裂及扩展规律, 对工程设计、施工具有重大的指导意义。基于以上目的, 国内外学者从理论、试验、数值模拟方面开展了大量的研究工作^[1-3]。就数值计算来说, 王水林等^[4]利用流行元法中数学网格和物理网格相互独立的特点, 模拟了裂纹的张开、闭合及扩展现

象。李树忱等^[5]在数值流形方法和单位分解法的基础上, 提出了无网格数值流形方法, 并给出了数值算例。黄云等^[6]采用三维弹性边界元分析了高拱坝上游坝踵裂纹稳定性及其扩展。有限元作为最成熟的数值分析方法, 被广泛应用于工程计算, 但涉及到材料断裂问题时, 还存在一些缺点^[7-8]: ①裂纹被限制于网格线上, 必须将裂纹面设置为单元的边、裂尖设置为单元的节点; ②在裂尖附近的高应力区需要布置高密度网格; ③分析裂纹扩展时, 随着裂纹的扩展, 必须重新划分网格。

1999 年 Belytschko^[7]提出了在常规有限元框架

收稿日期: 2009-11-19

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 50804014, No. 41072224); 教育部新世纪优秀人才计划 (No. NCET-08-0662); 河南省教育厅自然科学研究计划 (No. 2008A44005); 河南省高等学校青年骨干教师资助计划 (No. 2009GGJS-037)。

第一作者简介: 茹忠亮, 男, 1977 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程数值计算方面的研究工作。E-mail: ruzhongliang@hotmail.com

内求解不连续问题的扩展有限元法 (extended finite element method, XFEM)。该方法是基于单位分解的思想在常规有限元模式中加入能够反映不连续性的跳跃函数及裂尖渐近位移场函数, 有限元网格与裂纹相独立, 裂纹扩展不需重构有限元网格, 能方便地分析含裂纹体的不连续问题。陈胜宏等^[9]采用扩展有限元分析了小湾拱坝坝踵开裂问题, 但对裂纹的开裂作了简化, 认为裂纹完全贯穿整个单元, 没有考虑裂尖单元。Mose 等^[10]以扩展有限元为手段, 模拟了混凝土材料任意黏结型裂纹的扩展路径。文献[11—12]模拟了任意材料表面位错问题。本文针对 I 型裂纹, 给出了扩展有限元的位移模式, 建立了其离散方程, 推导了 J 积分计算应力强度因子的详细过程, 分析了积分区域及网格密度对应力强度因子计算精度的影响。

2 扩展有限单元法的基本原理

2.1 位移模式的构造

常规有限单元法中位移模式表示为

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (1)$$

式中: N_i 为节点 i 的插值形函数; u_i 为节点 i 的位移向量。在域内任意一点, 插值形函数都满足 $\sum_{i=1}^n N_i(x, y) = 1$ 。但上式常规有限元的位移模式仅适用于连续介质, 不适合处理裂纹这样的不连续体问题。

美国西北大学 Belytschko 等^[11]基于插值函数单元分解的思想, 提出了适合描述含裂纹面的近似位移插值函数:

$$u(x) = \sum_{i \in N} N_i(x) u_i + \sum_{j \in N^{\text{disc}}} N_j H(x) \alpha_j + \sum_{k \in N^{\text{asy}}} N_k \sum_{\alpha=1}^4 \phi_{\alpha}(x) b_k^{\alpha} \quad (2)$$

式中: N 为所有常规单元节点的集合; N^{disc} 为完全被裂纹贯穿单元节点的集合 (图 1 方块表示的节点); N^{asy} 为含裂尖单元节点的集合 (图 1 圆圈表示的节点); u_i 、 α_j 、 b_k^{α} 分别表示常规单元节点、贯穿单元节点和裂尖单元节点的位移; $H(x)$ 为跳跃函数 (Heaviside function, 式 (3)), 用于反映裂纹面位移的不连续性, 在裂纹面上, 下侧分别取 +1 和 -1。

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{裂纹面上} \\ -1 & \text{裂纹面下} \end{cases} \quad (3)$$

$\phi_{\alpha}(x)$ 为裂尖渐近位移场附加函数, 反映裂尖

的应力奇异性, 具体由以下基函数构成:

$$\phi_{\alpha}(x) = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right] \quad (4)$$

式中: r 、 θ 为以裂纹尖端为坐标原点的极坐标系 (图 2)。

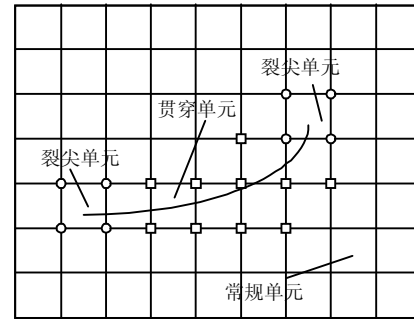


图 1 附加函数的加强结点

Fig.1 Enriched nodes of addition function

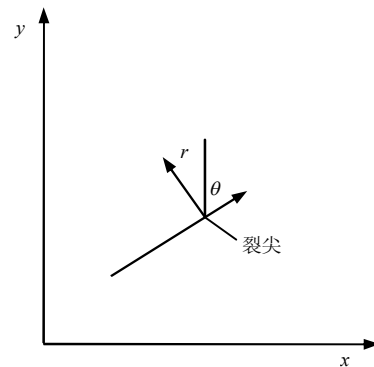


图 2 裂尖局部坐标系

Fig.2 Local coordinate system of crack tip

2.2 离散方程的建立

与常规有限元一样, 将有限元近似位移函数式 (2) 代入虚功方程, 可得到离散方程:

$$Kd = F \quad (5)$$

式中: K 为整体刚度矩阵, 由单元刚度矩阵 (式 (6)) 集成:

$$k_{ij}^e = \begin{pmatrix} k_{ij}^{uu} & k_{ij}^{ua} & k_{ij}^{ub} \\ k_{ij}^{au} & k_{ij}^{aa} & k_{ij}^{ab} \\ k_{ij}^{bu} & k_{ij}^{ba} & k_{ij}^{bb} \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中:

$$k_{ij}^{rs} = \int_{\Omega} (B_i^r)^T DB_j^s d\Omega, (r, s = u, a, b) \quad (7)$$

B_i^j 为形函数的偏导数 (B_i^u 、 B_i^a 、 B_i^b 分别对映常规单元、裂纹贯穿单元和裂尖单元), 具体表示如下:

$$\left. \begin{aligned} B_i^u &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \\ B_i^a &= \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,y} \\ (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix} \\ B_i^b &= \begin{bmatrix} (N_i \phi_\alpha)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i \phi_\alpha)_{,y} \\ (N_i \phi_\alpha)_{,y} & (N_i \phi_\alpha)_{,x} \end{bmatrix} \quad (\alpha=1 \sim 4) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

d 为节点位移向量, 其中包括常规单元结点、裂纹贯穿单元节点及裂尖单元节点的位移。

$$d = \{u_i, a_i, b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^4\}^T \quad (9)$$

F 为等效节点荷载向量, 由各单元等效节点荷载集合而成 (见图 3)。表示物体在边界条件下的平衡状态, Γ_t 、 Γ_u 、 Γ_c 分别为外力边界、位移边界、裂纹边界; f_t 、 f_b 分别表示体力和外力。

$$F = \{f_i^u, f_i^a, f_i^{b1}, f_i^{b2}, f_i^{b3}, f_i^{b4}\}^T \quad (10)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} f_i^u &= \int_{\Gamma_t} N_i f_t d\Gamma + \int_{\Omega} N_i f_b d\Omega \\ f_j^a &= \int_{\Gamma_t} N_j H f_t d\Gamma + \int_{\Omega} N_j H f_b d\Omega \\ f_k^{ba} \Big|_{a=1,2,3,4} &= \int_{\Gamma_t} N_k \phi_a f_t d\Gamma + \int_{\Omega} N_k \phi_a f_b d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

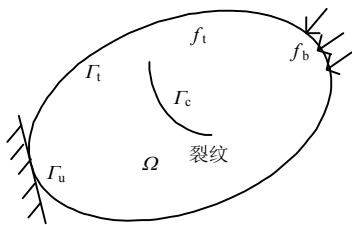


图 3 边界平衡状态

Fig.3 Equilibrium with boundary conditions

3 应力强度因子的计算

3.1 应力强度因子

应力强度因子 (stress intensity factor) 是表示场强的物理量, 控制了裂尖的应力、应变场, 也是断

裂力学中判断裂纹是否起裂扩展的重要参数。其中, 对应于张开型 (I 型) 裂纹的应力强度因子表示为 K_I , 剪切型 (II 型) 裂纹的应力强度因子表示为 K_{II} 。应力强度因子的数值计算方法常用的有直接积分法、围线积分法 (J 积分)、Green 函数法等, 文献 [13] 的研究表明, 采用 J 积分计算应力强度因子精度较高。本文将 J 积分算法引入 XFEM 计算应力强度因子, 裂纹尖端周线相互作用能量积分表达式为

$$I = \int_A \left[w^{(1,2)} \sigma_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} u_{i,1} \right] q_{,j} dA \quad (12)$$

式中: 上标 (2) 为位移辅助场, 其偏导为

$$\left. \begin{aligned} u_{1,1}^{(2)} &= \frac{1}{4G} \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_{1,1} + \frac{r_{,1} f_1}{2\sqrt{2\pi r}} \right) \\ u_{1,2}^{(2)} &= \frac{1}{4G} \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_{1,2} + \frac{r_{,2} f_1}{2\sqrt{2\pi r}} \right) \\ u_{2,1}^{(2)} &= \frac{1}{4G} \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_{2,1} + \frac{r_{,1} f_2}{2\sqrt{2\pi r}} \right) \\ u_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{4G} \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_{2,2} + \frac{r_{,2} f_2}{2\sqrt{2\pi r}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

对于 K_I , 有:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 2(\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \\ f_2 &= 2(\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - 2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

对于 K_{II} , 有:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -2(\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ f_2 &= -2(\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中:

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (\text{平面应力}) \quad (16)$$

$$\kappa = 3-4\nu \quad (\text{平面应变}) \quad (17)$$

可以求得应力强度因子 K_I 、 K_{II} 的表达式:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{E}{2} I_I \\ K_{II} &= \frac{E}{2} I_{II} \end{aligned} \right\} \quad (\text{平面应力}) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} I_I \\ K_{II} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} I_{II} \end{aligned} \right\} \quad (\text{平面应变}) \quad (19)$$

3.2 积分区域的选取

由式 (14) 可知, 计算应力强度因子需取裂尖附近的特定范围作为附加函数的积分区域。通常计算仅取裂尖单元的区域, 计算精度与裂尖的位置和裂尖单元面积 h (见图 4) 有很大的关系。若裂尖单元面积 h 趋于 0, 则附加的加强函数也趋于 0, 将使计算结果出现奇异。

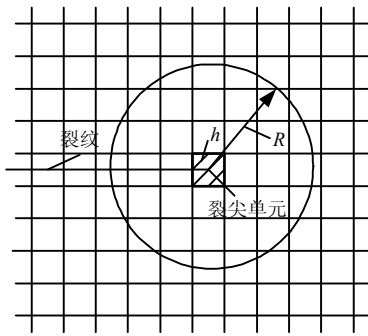


图 4 积分区域
Fig.4 Integration domain

本文将积分区域扩大化, 取裂尖为圆心、 R 为半径的圆作为积分区域, 所有在圆内的节点需用裂尖渐进位移场函数加强。 $R = r_k \sqrt{h}$, 其中 r_k 为积分区域因子, 通过 r_k 控制积分区域, 避免了积分区域内附加函数为 0 的情况, 探讨了积分区域对应应力强度因子的影响。

4 数值算例

4.1 算例 1

图 5 为尺寸 $1\text{ m} \times 2\text{ m}$ 的有限板, $\sigma = 1.0\text{ MPa}$, 在板左侧有一裂纹 $\alpha = 0.45\text{ m}$, 板物理常量为: $E = 30\text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, 应力强度因子理论解^[14]为

$$\left. \begin{aligned} K_I &= F\left(\frac{a}{b}\right) \sigma \sqrt{\pi a} \\ F(\xi) &= 1.12 - 0.231\xi + 10.55\xi^2 - \\ &\quad 21.72\xi^3 + 30.39\xi^4 \left(\xi < 0.6 = \left(\frac{a}{b}\right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

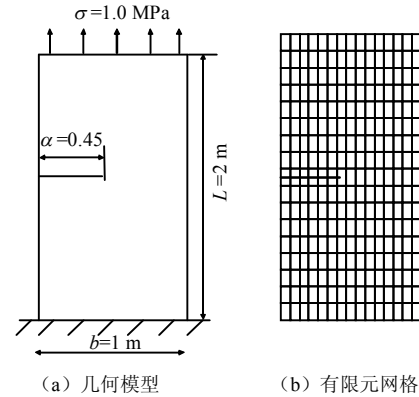


图 5 单边裂纹计算模型
Fig.5 Edge crack numerical model

由式 (20) 计算可得 K_I 的理论解为: $K_{\text{exac}} = 2.8766$ 。采用 XFEM 将计算区域分别划分为 10×12 、 24×36 、 42×52 、 68×74 、 86×98 、 100×120 的有限元网格, 计算不同积分区域因子 ($r_k = 1.0 \sim 5.0$) 时应力强度因子的数值解 K_{num} , 理论解与数值解的比值定义为应力强度因子的相对值 K :

$$K = \frac{K_{\text{exac}}}{K_{\text{num}}} \quad (21)$$

表 1 所列为不同网格密度及 r_k 所对应的应力强度因子的相对值, 图 6 是 $r_k = 3.0$ 时, 网格密度对应应力强度因子的影响, 图 7 是网格密度为 68×74 时, r_k 对应应力强度因子的影响曲线。

从表 1 及图 6、7 中可以看出: ①误差随着网格数的增大而逐渐减小, 当计算网格达到 6 000 左右时对结果的影响就可忽略。②积分区域因子小于 2.5, 计算结果不稳定; 大于 2.5, 基本趋于稳定, 笔者建议积分区域因子取 2.5~3.0。

4.2 算例 2

图 8 为一个无限大板, $\sigma = 10\text{ MPa}$, 在板中有 $2a = 200\text{ mm}$ 的裂纹, 取裂纹右端 ABCD ($10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$) 的方形区域为计算区域。板的弹性常数为 $E = 30\text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, 裂纹的应力强度因子精确解为

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (22)$$

表 1 不同网格和积分区域因子的应力强度因子相对值 K
Table 1 Normalized stress intensity factor of K with various meshes and domain factors

网格	积分区域因子 r_k								
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5
120	0.965 4	0.944 9	0.940 8	0.933 4	0.932 6	0.927 2	0.931 9	0.934 7	0.901 6
864	1.014 1	0.989 6	0.981 2	0.976 2	0.978 1	0.977 6	0.977 3	0.977 8	0.977 6
2 268	1.018 7	1.002 2	0.991 0	0.985 4	0.986 1	0.987 3	0.986 5	0.987 1	0.987 0
5 932	1.029 3	1.002 0	1.008 0	0.992 2	0.992 1	0.993 9	0.992 9	0.993 1	0.993 5
8 428	1.032 1	1.010 1	1.004 6	0.993 8	0.994 1	0.995 8	0.994 9	0.995 0	0.995 3
12 000	1.022 0	1.011 7	0.999 9	0.994 6	0.995 2	0.996 5	0.995 8	0.995 7	0.996 0

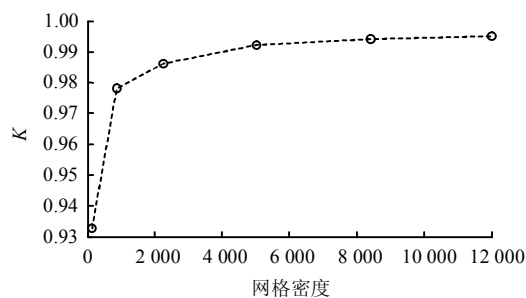


图6 网格密度对应应力强度因子的影响

Fig.6 The effect of mesh density on stress intensity factor

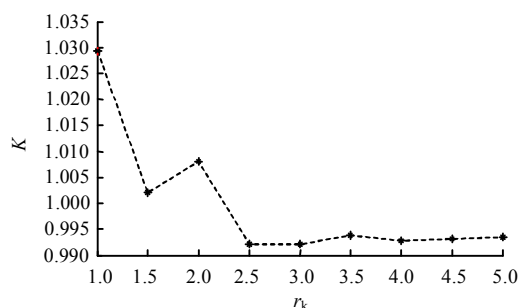


图7 积分区域因子对应应力强度因子的影响(算例1)

Fig.7 The effect of integration factor on stress intensity factor (example 1)

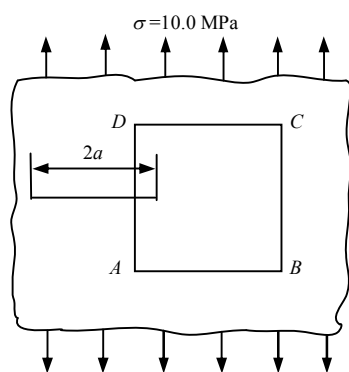


图8 无限板裂纹

Fig.8 Infinite cracked plate

由式(22)得, $K_{\text{exac}} = 1.7725$, 将计算区域划分为 64×72 的有限元网格, 计算不同积分区域因子($r_k = 1.5 \sim 5.0$)对应的应力强度因子的相对值(见表2)。

表2 不同积分区域因子应力强度因子的相对值
Table 2 Normalized stress intensity factor of K with various domain factors

相对值	积分区域因子 r_k							
	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5
K	1.0028	0.9731	0.9746	0.9728	0.9734	0.9734	0.9734	0.9734

从图9可看到, r_k 取1.5时虽然有较高的精度, 但数值不稳定; r_k 大于3.0, 数值趋于稳定, 收敛

性较好。因此, 对于无限板裂纹计算积分区域因子建议取大于或等于3.0。

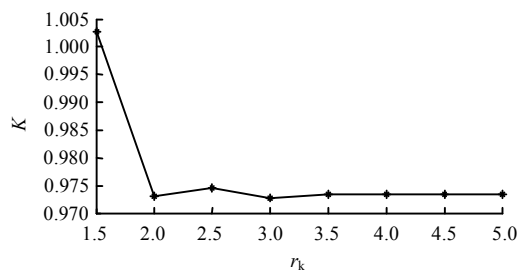


图9 积分区域因子对应应力强度因子的影响(算例2)

Fig.9 The effect of integration factor on stress intensity factor (example 2)

5 结论

(1) 扩展有限元是基于连续体基础上求解裂纹等不连续问题的新方法。本文对其位移模式的构造、支配方程的建立、 J 积分计算应力强度因子等关键步骤进行了分析。通过算例表明, XFEM 在计算材料断裂问题时, 有限元网格完全独立于裂纹面, 不需在裂纹尖端处布置高密度的网格, 无需满足裂纹面作为单元边, 裂尖作为单元节点的要求, 简化了前处理, 提高了计算效率。

(2) 分析了不同网格密度、积分区域对应应力强度因子计算精度的影响。网格密度对计算结果影响较小; 积分区域因子 r 对计算结果的影响较大, 对于有限板单边断裂问题, 建议取 $r = 2.5 \sim 3.0$; 对于无限板单边断裂问题, 建议取 $r = 3.0$ 。

(3) XFEM 作为一种计算非连续体变形的新技术, 可对介质的摩擦接触、裂纹扩展、断层演化等问题进行分析, 具有广阔的应用前景。

参考文献

- [1] HUYNH J, MOLENT L, BARTER S. Experimentally derived crack growth models for different stress concentration factors[J]. *International Journal of Fatigue*, 2008, 30(10-11): 1766-1786.
- [2] 李强, 杨庆, 栾茂田. 曲线翼型裂纹扩展路径理论分析及试验验证[J]. *岩土力学*, 2010, 31(2): 345-349.
LI Qiang, YANG Qing, LUAN Mao-tian. Study of curved wing crack path by theory and testing methods[J]. *Rock and Soil Mechanics*. 2010, 31(2): 345-349
- [3] 余天堂. 含裂纹体的数值模拟[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(24): 4434-4439.
YU Tian-tang. Numerical simulation of a body with cracks[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(24): 4434-4439.

- [4] 王水林, 葛修润. 流行元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 312—316.
WANG Shui-lin. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1997, 16(5): 312—316.
- [5] 李树忱, 程玉民, 李术才. 扩展的无网格流行方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(12): 2065—2073.
LI Shu-chen, CHENG Yu-min, LI Shu-cai. Enriched meshless manifold method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 12(24): 2063—2073.
- [6] 黄云, 金峰, 王光纶. 高拱坝上游坝踵裂纹稳定性及扩展[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2002, 42(4): 555—559.
HUANG Yun, JIN Feng, WANG Guang-lun. Stability and propagation of cracks at the heel of high arch dams[J]. **Tsinghua University (Sci. & Tech.)**, 2002, 42(4): 555—559.
- [7] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, 1999, 45(5): 601—620.
- [8] SUKUMAR N. Modeling quasi-static crack growth with finite element method Part I: Computer Implementation[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2003, 40(26): 7513—7537.
- [9] 陈胜宏, 江卫明, 徐明毅. 小湾高拱坝坝踵开裂的有单元法分析[J]. 水利学报, 2003, (1): 66—67.
CHEN Sheng-hong, JIANG Wei-ming, XU Ming-yi. Finite element analysis of the crack propagation in high arch dam heel of Xiaowan project[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2003, (1): 66—67.
- [10] MOSE N, BELYTSCHKO T. Extended finite element method for cohesive crack growth[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2002, 69(7): 813—833.
- [11] BELYTSCHKO T, GRACIE ROBERT. On XFEM applications to dislocations and interfaces[J]. **International Journal of Plasticity**, 2007, 23(10—11): 1721—1738.
- [12] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, 1999, 46(1): 131—150.
- [13] TOSHIO N, YOUHEI O, SHUICHI T. Stress intensity factor analysis of interface cracks using XFEM[J]. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, 2003, 56(8): 1151—1173.
- [14] 程靳, 赵树山. 断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

(上接第 2170 页)

《岩土力学》2011 年第 2 期被 EI 收录论文 (51 篇, 收录率 100%) (2)

序号	论文题名	作 者	页 码
31	位移反分析的粒子群优化-高斯过程协同优化方法	苏国韶, 张克实, 吕海波	510—515
32	平行小净距盾构与 CRD 法黄土地铁隧道施工力学研究	孔祥兴, 夏才初, 仇玉良, 等	516—525
33	分数导数模型描述的饱和土桩纵向振动分析	刘林超, 杨 晓	526—532
34	采动覆岩裂隙分布及其空隙率特征	宋颜金, 程国强, 郭惟嘉	533—536
35	近距离交叉隧洞爆破对既有隧道的振动影响	叶培旭, 杨新安, 凌保林, 等	537—541
36	基于岩体质量的红层软岩边坡坡度设计公式研究	邱恩喜, 谢 强, 赵 文, 等	542—546
37	基于 RNN 模型的坝体和岩基区间参数反演方法研究	雷 鹏, 苏怀智, 张贵金	547—552
38	变荷载下基于指数形式渗流的一维固结分析	李传勋, 谢康和, 卢萌盟, 等	553—558
39	基于潘氏极大值原理的边坡稳定性的整体分析法	杨召亮, 孙冠华, 郑 宏	559—563
40	考虑力学参数关联的非均质煤概率模型	张春会, 赵全胜, 于永江	564—570
41	基于认知聚类分区方法的边坡可靠度分析	唐小松, 李典庆, 周创兵	571—578
42	样本数与边坡模糊随机可靠指标关系研究	谭晓慧, 毕卫华, 胡晓军, 等	579—584
43	粗粒土三轴试验数值模拟与试样颗粒初始架构初探	王光进, 杨春和, 张 超, 等	585—592
44	基于 Hoek-Brown 非线性破坏准则的软岩地基极限承载力数值模拟	高文华, 朱建群, 张志敏, 等	593—598
45	基于 ABAQUS 建立土体本构模型库的研究	司海宝, 蔡正银	599—603
46	列车荷载下土覆弹性层横观各向同性饱和地基的动力响应	周 晔, 郑荣跃, 刘干斌	604—610
47	非均质各向异性黏土光滑条基承载力上解解	秦会来, 王玉杰, 唐志丹, 等	611—616
48	环形超深基坑围护结构受力变形特性分析	罗耀武, 凌道盛, 陈云敏, 等	617—622
49	洞群模型试验中微型多点位移计的设计及应用	张乾兵, 朱维申, 李 勇, 等	623—628
50	基于弯曲路径的混凝土超声层析成像及其改进	熊 炜, 周曾辉, 余开彪, 等	629—634
51	较硬地层中旋进触探技术应用可行性研究	宋 玲, 李 宁, 刘奉银	635—640